Title	複素領域におけるコーシー問題の解の特異性伝播(複素領域の偏微分方程式)
Author(s)	猪狩, 勝寿
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1028: 1-20
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/61803
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 1-20

複素領域におけるコーシー問題の解の特異性伝播

愛媛大　工　　猪狩勝寿 (Katsuju Igari)

1．序文

複素領域におけるコーシー問題の解の特異性伝播について考察する．特に初期データが特異性をもつとき，その特異性が解にどのように伝播するかを考える．この問題は偏微分方程式論の基本問題の一つであり，その研究は J. Leray の論文 [L] に遡る．その後多くの重要な論文が発表され，特に一定重複度の特性根を持つ偏微分作用素および包合的多重特性集合をもつ作用素にたいしては Hamada, Leray and Wagschal [H-L-W] および C. Wagschal [W1] によって最終的な結果が得られている．また，非包合的多重特性集合を持つ作用素についても，状況は多岐多様であるが，J. Urabe [U], C. Wagschal [W2], J.　Persson [P], S. Ouchi [O], S. Fujiie [F] などの興味深い論文が発表されている．

本論の目的は，非包合的多重特性集合を持つある偏微分作用素のクラスについてこれまでとは異なる見地から考察し，特異性の伝播，とくに特異台の分岐について研究することにある．

まず，コーシー問題

$$
\text{(CP1)} \quad \begin{cases} P^{(1)}u := \{D_1^2 - z_1^2 \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk} D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j + c\}u = 0, \\ D_1^i u(0, z') = u_i(z'), \quad i = 0, 1 \end{cases}
$$

を考えよう．ここで，係数は Ω で正則，$a_{nn}(0) \neq 0$ かつ初期データは $\mathcal{R}\{(S-T) \cap \Omega\}$ で正則とする．

$(z, \zeta') = (0, \nu')$ の近傍で適当に分枝を取り，$\delta(z, \zeta') := \sqrt{\sum a_{jk}(z)\zeta_j\zeta_k}$，$\lambda^1 := z_1\delta, \lambda^2 := -z_1\delta$ と定義する．さらに初期値問題 $D_1\varphi - \lambda^i(z, D'\varphi) = 0, \varphi(0, z') = z_n$ の解を φ^i で表し，$K^i := \{z; \varphi^i(z) = 0\}$ と定義する（i=1,2）．K^i はともに T を通りそこで２次で互いに接する $P^{(1)}$ の特性曲面である。

J. Urabe[U], C. Wagschal[W2], J. Persson[P] はそれぞれある条件の下で次のことを示した.「原点近傍 ω と $\mathcal{R}(\omega - K_1 \cup K_2)$ で正則な（CP 1）の唯１つの解 $u(z)$ が存在する.」　我々の関心は初期データの特異性が必ず K_1, K_2 の両方へ伝播するか否かにある．

定義１．$u(z)$ は $\mathcal{R}(\omega - K_1 \cup K_2)$ で正則であるとする．$\hat{z} \in K_1 \cup K_2$ が $u(z)$ の解析接続点（point of analytic continuation）であるとは，ある $z^\circ \in (\omega - K_1 \cup K_2)$ を始点とし $\hat{z}$ を終点とする，終点以外は $\omega - K_1 \cup K_2$ を通る任意のパス（連続曲線）に沿って $\hat{z}$ まで解析接続可能であることである．解析接続点でないとき特異点（singular point）という．

この定義によると，引用した上記の結論は

$$
\text{sing.supp}[u] \subseteq (K_1 \cup K_2) \quad \text{in } \omega
$$

と表される．我々はつぎの定理を証明する．

定理１　$\cup_{i=0,1}\mathrm{sing.\ supp}\,[u_i] \neq \emptyset$であり，$u(z)$ は$\mathcal{R}\{\omega - K_1 \cup K_2\}$ で正則なコーシー問題（CP1）の解とする．さらに$\omega - K_1 \cup K_2$, $K_i - T$ は連結であるとする．このとき$K_1 \cup K_2$ に関する指数条件（indicial condition）

$$\pm(2\mu+1)\sqrt{a_{nn}(0)} + b_n(0) \neq 0, \quad \forall \mu \in \mathbf{N}$$

のもとで等式

$$\mathrm{sing.supp}[u] = K_1 \cup K_2 \quad \mathrm{in}\ \omega$$

がなりたつ．

この定理は，初期データによらず，特異性は必ず K_1, K_2 の両方に伝播することを結論しており，実領域での特異性の分岐現象に対応する．

さてもう１つコーシー問題

$$(\mathrm{CP2}) \quad \begin{cases} P^{(2)}u := \{z_1 D_1^2 - z_1 \sum_{j,k=2}^n a_{jk} D_j D_k + \sum_{j=1}^n b_j D_j + c\}u = 0, \\ u(0, z') = u_0(z') \end{cases}$$

を考えよう．ここで，係数はΩ で正則，$a_{nn}(0) \neq 0$ かつ初期データは$\mathcal{R}\{(S-T)\cap\Omega\}$ で正則とする．

まず，この作用素 $P^{(2)}$ は Baouendi-Goulaouic の意味での重み１のフックス型作用素であることに注意しよう．$(z, \zeta') = (0, \nu')$ の近傍で適当に分枝を取り，$\delta(z, \zeta') := \sqrt{\sum a_{jk}(z)\zeta_j\zeta_k}$，$\lambda^1 := \delta, \lambda^2 := -\delta$ と定義する．さらに初期値問題 $D_1\varphi - \lambda^i(z, D'\varphi) = 0, \varphi(0, z') = z_n$ の解を φ^i で表し，$K^i := \{z; \varphi^i(z) = 0\}$ と定義する

(i=1,2)．K^i は T で互いに交わる $P^{(2)}$ の特性曲面である。さらに初期面 S も特性的であることに注意しよう.

S. Ouchi [O] は初期面 S に関する指数条件 $-b_1(0) \notin \mathbf{N}$ のもとで次のことを示した.「原点近傍 ω と $\mathcal{R}(\omega - S \cup K_1 \cup K_2)$ で正則な（CP2）の唯１つの解 $u(z)$ が存在する.」. この場合，初期データは $S-T$ で正則であっても，K_1 または K_2 を回って $S-T$ に戻ると特異性が現われる可能性がある. (S. Fujiie [F] 参照)

定義２． $u(z)$ は $\mathcal{R}(\omega - S \cup K_1 \cup K_2)$ で正則であるとする． $\hat{z} \in S \cup K_1 \cup K_2$ が $u(z)$ の解析接続点（point of analytic continuation）であるとは，ある $z^\circ \in (\omega - S \cup K_1 \cup K_2)$ を始点とし $\hat{z}$ を終点とする，終点以外は $\omega - S \cup K_1 \cup K_2$ を通る任意のパス（連続曲線）に沿って $\hat{z}$ まで解析接続可能であることである．解析接続点でないとき特異点（singular point）という.

この定義によると，引用した上記の結論は

$$\text{sing.supp}[u] \subseteq (S \cup K_1 \cup K_2) \quad \text{in } \omega$$

と表される．我々はつぎの定理を証明する.

定理２　sing. supp $[u_0] \neq \emptyset$ であり， $u(z)$ は $\mathcal{R}\{\omega - S \cup K_1 \cup K_2\}$ で正則なコーシー問題（CP2）の解とする．さらに $\omega - S \cup K_1 \cup K_2$, $K_i - T$, $S-T$ は連結であるとする．このとき $K_1 \cup K_2$ に関する指数条件（indicial condition）

$$\pm\{2\mu + b_1(0)\}\sqrt{a_{nn}(0)} + b_n(0) \neq 0, \quad \forall \mu \in \mathbf{N}$$

のもとで

$$\mathrm{sing.supp}[u] \supseteq K_1 \cup K_2 \quad \text{in } \omega$$

がなりたつ.

定理1および2は以下の節2～4で証明される．作用素 $P^{(1)}, P^{(2)}$ は一見異なる型に見えるが，実は強い関連がある．節2では $P^{(1)}, P^{(2)}$ を含む2階の作用素のクラスとその特性面の指数多項式を定義し，定理1，2をやや一般な形で述べる．定理の証明の方針は $K_1 \cup K_2$ に解析接続点があると仮定すると，u が ω で正則になることを導き矛盾を示すことである．節3では，Hartogs の方法を用い，正則関数の解析接続について準備の考察をする．節4で定理の証明をする．そこでは節3の結果と先の論文 [I1] で得た特性コーシー問題に関するコーシー・コワレフスカヤ型定理を用い，解 u があるパスに沿って原点まで解析接続されること，さらに u が ω で正則になることを示す．最後に，節5では高階の作用素への結果の拡張について述べる.

本稿は，数理研での研究会における講演に，その後分かったことを加味して書かれた．視点も講演時とはやや異なるものとなった.

記号：

$n \geq 2, \quad z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n, \quad z' = (z_2, \cdots, z_n),$

$D = (D_1, \cdots, D_n), \quad D_j = \partial/\partial z_j, \quad D' = (D_2, \cdots, D_n),$

$\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n, \quad \zeta' = (\zeta_2, \cdots, \zeta_n), \quad \nu = (0, \cdots, 0, 1) = (0, \nu')$,

$\sum'_j, \sum'_{j,k}$: $j \geq 2$ および $j, k \geq 2$ についての和,

$S = \{z; z_1 = 0\}$, $\quad T = \{z; z_1 = z_n = 0\}$,

Ω: $\mathbf{C}^n$ の原点 O を含む単連結開集合, $\quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

2．非包合2重特性集合をもつ偏微分作用素

作用素 $P^{(1)}, P^{(2)}$ は一見異なるタイプの作用素に見えるが，実は強い関連がある．この節では，$P^{(1)}, P^{(2)}$ を含む作用素のクラスを考え，指数多項式を統一的に定義し，定理１および２をやや一般な形で与えよう．

次の条件を満たす２階正則係数偏微分作用素 $P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(z) D^\alpha$ を考える。

条件N： 主表象 $P_2(z, \zeta)$ は $(z, \zeta') = (0, \nu')$ の近傍でつぎの（１）-（３）を満たす。

(1) $\quad P_2 := a(z)\{\zeta_1 - \lambda^1(z, \zeta')\}\{\zeta_1 - \lambda^2(z, \zeta')\}$

(2) $\quad Q^1(z, \zeta') := (\partial P_2 / \partial \zeta_1)|_{\zeta_1 = \lambda^1(z, \zeta')} = 0 \quad \text{on } \{z_1 = 0\}$

(3) $\quad (\partial Q^1 / \partial z_1)(0, \nu') \neq 0$

ただし、$a(z)$, $\lambda^i(z, \zeta')$ はそれぞれ $z = 0$, $(z, \zeta') = (0, \nu')$ の近くで正則。

次の命題は自明である．

命題2-1．　1）$Q^1(z,\zeta')=a(z)\{\lambda^1(z,\zeta')-\lambda^2(z,\zeta')\}$.

2）$Q^2(z,\zeta'):=(\partial P_2/\partial\zeta_1)|_{\zeta_1=\lambda^2(z,\zeta')}=-Q^1(z,\zeta')$.

命題2-2．条件Nのもとで次の等式が成り立つ。

$$(\partial Q^1/\partial z_1)(0,\nu')=\{\zeta_1-\lambda^1,a(\zeta_1-\lambda^2)\}_{\zeta_1=\lambda^1(z,\zeta'),(z,\zeta')=(0,\nu')}.$$

証明：

$$\{\zeta_1-\lambda^1,a(\zeta_1-\lambda^2)\}=\{\zeta_1-\lambda^1,a(\lambda^1-\lambda^2)\}+\{\zeta_1-\lambda^1,a(\zeta_1-\lambda^1)\}.$$

第2項は $\{\zeta_1-\lambda^1,a\}(\zeta_1-\lambda^1)$ に等しく、$\zeta_1=\lambda^1$ 上で消える。また $a(\lambda^1-\lambda^2)=0$ on $z_1=0$ だから、そこで第1項は $(\partial/\partial z_1)\{a(\lambda^1-\lambda^2)\}$ に一致する。　□

この命題は、集合 $\{\zeta_1=\lambda^1(z,\zeta'),z_1=0\}$ が $(z,\zeta')=(0,\nu')$ の近傍で P の非包合的2重特性集合であることを意味している。

命題2-3．　作用素 P が条件Nを満たす必要十分条件は P が次のいずれかの形に書けることである。

$$\begin{aligned} P^I &:= a\{(D_1+\sum_j{}' a_jD_j)^2-z_1^2\sum_{j,k}{}' a_{jk}D_jD_k\}+b_1D_1+\sum_j{}' b_jD_j+c \\ P^{II} &:= z_1a\{(D_1+\sum_j{}' a_jD_j)^2-\sum_{j,k}{}' a_{jk}D_jD_k\}+b_1D_1+\sum_j{}' b_jD_j+c \end{aligned}$$

ただし、係数はすべて正則であり、P^I,P^{II} のいずれに於いても $a(0)\neq 0, a_{nn}(0)\neq 0$ である。

証明：　（１）より、

$$P = a\{(D_1 + a_{1j}D_j)^2 - a_{jk}D_jD_k\} + b_1D_1 + b_jD_j + c$$

と書ことができ，係数はすべて原点近くで正則となる。分枝を適当に選び、

$$\alpha = \frac{\lambda^1 - \lambda^2}{2} = \sqrt{\sum_{j,k}' a_{jk}\zeta_j\zeta_k}$$

と定める。

（２）より、$Q^1 = 2a\alpha = O(z_1)$ だから $a = O(z_1)$ または$\alpha = O(z_1)$. 従って，P は前者なら P^{II} の形に、後者なら P^I の形に書ける。（３）より、いずれの場合も $a(0) \neq 0, a_{nn}(0) \neq 0$.　□

明らかに $P^{(1)}, P^{(2)}$ は、それぞれ P^I, P^{II} の特別な場合である。

つぎに特性指数を定義しよう．φ^i を次の初期値問題の解として定義される相関数とする（$i = 1, 2$）．

$$D_1\varphi - \lambda^i(z, D'\varphi) = 0, \quad \varphi(0, z') = z_n.$$

$K^i := \{z; \varphi(z) = 0\}$ は特性曲面である。P の K^i に関する特性指数を定義しよう。

$$A^i := \frac{\partial Q^i}{\partial z_1}(0, \nu'), \quad B^i := (P\varphi^i)(0)$$

とおく。つぎの１次式を P のK^i に関する指数多項式、またその根を特性指数とよぶ。

$$F^i(\mu) := A^i\mu + B^i. \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

次に，特性指数を係数を用い具体的に表そう．$\alpha(z,\zeta')=\sum'_{j,k}a_{jk}(z)\zeta_j\zeta_k$, $\beta(z,\zeta')=\sum'_j a_j(z)\zeta_j$ とおく。ここで $\sum_j=\sum_{j=2}^n, \sum'_{j,k}=\sum_{j,k=2}^n$ を表わす。また、適当に分枝を選び、$\delta(z,\zeta')=\sqrt{\alpha(z,\zeta')}$ と定義する。P^I の特性根は $\lambda^1=-\beta(z,\zeta')-z_1\delta(z,\zeta'), \lambda^2=-\beta(z,\zeta')+z_1\delta(z,\zeta')$ であり、P^{II} の特性根は$\lambda^1=-\beta(z,\zeta')-\delta(z,\zeta'), \lambda^2=-\beta(z,\zeta')+\delta(z,\zeta')$ である。

コーシー問題

$$D_1\varphi-\lambda^i(z,D'\varphi)=0,\quad \varphi(0,z')=z_n$$

で与えられる相関数を $\varphi^i(z)$ で表わす。$K^i=\{z;\varphi^i(z=0\}$ は T を通る特性面である。

まず、Q^1,Q^2 は P^I,P^{II} に共通で、$Q^1=-Q^2=2az_1\delta$ となる。したがって

$$A^1=-A^2=2a(0)\delta(0,\nu')=2a(0)\sqrt{a_{nn}(0)}.$$

次にB^i であるが、これは P^I,P^{II} により異なる。まず P^I についてであるが、$P^I\varphi^1(0)=a(0)(D_1+\beta(z,D'))^2\varphi^1(0)+\sum_j b_j\varphi^1(0)$ であり、$D^n\varphi^1(0)=1$, $D^j\varphi^1(0)=0$ for $j=2,\cdots,n-1$, $D^1\varphi^1(0)=-a_n(0)$、さらに$D_1+\beta(z,D'))^2\varphi^1(0)=(D_1+\beta(z,D'))z_1\delta(z,D')\varphi^1(0)=\delta(0,\nu')$ に注意すると、

$$B^1=a(0)\sqrt{a_{nn}(0)}-b_1(0)a_n(0)+b_n(0), B^2=-a(0)\sqrt{a_{nn}(0)}-b_1(0)a_n(0)+b_n(0)$$

を得る。したがって、P^I に対する指数多項式は

$$F^i(\mu)=\pm a(0)\sqrt{a_{nn}(0)}(2\mu+1)-b_1(0)a_n(0)+b_n(0)\qquad(2)$$

ただし，$i=1$ のときは $+$ を, $i=2$ のときは $-$ をとるものとする.

次に P^{II} についてであるが、$P^{II}\varphi^1(0) = \sum_j b_j\varphi^1(0)$ であり、$D^n\varphi^1(0) = 1$, $D^j\varphi^1(0) = 0$ for $j = 2, \cdots, n-1$, $D^1\varphi^1(0) = -a_n(0) + \delta(0, \nu')$ に注意すると、

$B^1 = -b_1(0)a_n(0) + b_1(0)\sqrt{a_{nn}(0)} + b_n(0), B^2 = -b_1(0)a_n(0) - b_1(0)\sqrt{a_{nn}(0)} + b_n(0)$

を得る。従って，P^{II} に対する指数条件は

$$F^i(\mu) = \pm\sqrt{a_{nn}(0)}\{2a(0)\mu + b_1(0)\} - b_1(0)a_n(0) + b_n(0) \tag{3}$$

ただし，$\pm$ のとり方は前と同様である.

定理 2-4．$K_1 \cup K_2$ に関する指数条件：$F^i(\mu) \neq 0, \forall\mu \in \mathbf{N}, i = 1, 2$ を仮定する．$P^{(1)}$ の代わりに P^I に対してコーシー問題（CP1）を考えると，定理 1 と同じことが成り立つ．また，$P^{(2)}$ の代わりに P^{II} に対してコーシー問題（CP2）を考えると，定理 2 と同じことが成り立つ.

3．Hartogs の方法

Hartogs の方法を用い，正則関数の解析接続について準備の考察をしておく. $r_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ とし，$W := \{|z_i| < r_i; \forall i\}$ とする (polydisc)．$f(z_1, \cdots, z_{n-1})$ は $\{|z_i| < r_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ における正則関数で $|f(z_1, \cdots, z_{n-1})| < r_n$ を満たすものとし，$K := \{z_n = f(z_1, \cdots, z_{n-1})\}$ と記す．つぎの命題は Hartogs による.

命題３-１： $\omega \subset W$ を $\hat{z} \in K$ の近傍とする． $(W \setminus K) \cup \omega$ で正則なすべての $u(z)$ は W に正則延長される．

この命題の簡単な拡張として次の命題をえる．

命題３-２： $u(z)$ は普遍被覆 $\mathcal{R}(W \setminus K)$ で正則とする． もし $z^\circ \in W \setminus K$, $\hat{z} \in K$ およびパス（連続曲線）$\gamma : z = z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で $z(0) = z^\circ, z(1) = \hat{z}$ かつ $z(t) \in W \setminus K$ （$t \neq 1$）を満たすものがあり， $u(z)$ の関数要素が γ に沿って $\hat{z}$ まで解析接続されるなら， $u(z)$ は W に正則延長される．

証明の方針: $u(z)$ が１価であることをしめせばよい． γ に沿って解析接続された $\hat{z}$ における関数要素は，十分小さな $\rho > 0$ にたいし， $\omega := \{|z_i - \hat{z}_i| < \rho; i = 1, \cdots, n\}$ で正則となる． $W \setminus K$ 内の任意の閉曲線（$\zeta(0) = \zeta(1) = z^\circ$） δ が $\omega \setminus K$ 内の閉曲線とホモトープなることを示せば良い．

つぎに $f_i(z), i = 1, \cdots, \mu$ は Ω で正則で， $f_i(z) = 0$ on T, $i \neq j$ なら $f_i(z) \neq f_j(z)$ for $z \notin T$，さらに $Df_i(z) := (D_1 f_i(z), \cdots, D_n f_i(z)) \neq 0$ in Ω を満たすとする． $K_i := \{z; f_i(z) = 0\}$ と記すと，つぎの命題を得る．

命題３-３． $\Omega - \cup_{i=1}^{\mu} K_i, K_i - T$ および K_i はすべて連結であり， $u(z)$ は普遍被覆 $\mathcal{R}(\Omega - \cup_{i=1}^{\mu} K_i)$ で正則であるとする．すると，つぎの (a), (b), (c) は同値である．

(a) $u(z)$ は解析接続点 $\hat{z} \in (K_\mu - T)$ を持つ.

(b) $K_\mu - T$ 上のすべての点は $u(z)$ の解析接続点である.

(c) $u(z)$ は $\mathcal{R}(\Omega - \cup_{i=1}^{\mu-1} K_i)$ で正則である.

証明の方針：(a)⇒(b). $z^\circ \in (\Omega - \cup_{i=1}^{\mu} K_i)$ とし, z^* を $K_\mu - T$ の任意の点とする. $\gamma : z = z(t)$ を z° を始点, z^* を終点とし, 終点以外は $\Omega - \cup_{i=1}^{\mu} K_i$ を通る任意のパスとする. $u(z)$ が γ に沿って, z° から z^* まで解析接続されることを示す.

$K_\mu - T$ 上を $\hat{z}$ から z^* に至るパスを $\delta : z = \zeta(t)$ $(0 \le t \le 1)$ とする. z^* に十分近い γ 上の点 $z(s)$ を取り, $\hat{z}$ より $z(s)$ に至る δ に近いパス δ^s で, 始点以外は $\Omega - \cup_{i=1}^{\mu} K_i$ を通り, $s \to 1$ のとき $\delta^s \to \delta$ なるものをつくる.

$\hat{z}$ は解析接続点であるから, $u(z)$ を, まず z° より γ に沿って $z(s)$ まで, つづいて $z(s)$ より δ^s にそって $\hat{z}$ まで解析接続する. 得られる $\hat{z}$ における関数要素は s に依らない.

次に, 命題3-2を繰り返し（有限回）用いて, $\hat{z}$ より δ にそって z^* まで解析接続できることを示す. 得られる z^* における関数要素は s によらず, s を十分1に近くとると $z(s)$ における要素の直接接続であることが分かる.

(b)⇒(c). $\gamma : z = z(t)$ $(0 \le t \le 1)$ は z° を始点とし, $\Omega - \cup_{i=1}^{\mu-1} K_i$ をとおるパスとする. γ が K_μ に触れなければ $u(z)$ は勿論 $z(1)$ まで接続される. 途中で K_μ に触れても $z(1)$ まで接続されることを示す. $t = s$ で1回だけ K_μ を通る場合を考えよう. $z(s)$ は解析接続点だから, $u(z)$ は $z(s)$ まで接続される. この $z(s)$ を超え, $z(1)$ まで接続されることを示す. そのために, ϵ を十分小さく取り, $z(s)$

での関数要素の収束多重円板内で，$z(s-\epsilon)$ から $z(s+\epsilon)$ までの間でパス γ を K_μ に触れないように作り変える（$\tilde{\gamma}$ と記す）．$z(s+\epsilon)$ での要素は $z(s-\epsilon)$ での要素の直接接続であり，$\tilde{\gamma}$ に沿っての接続とも見なせる．従って，$\tilde{\gamma}$ は $\Omega-\cup_{i=1}^{\mu}K_i$ を通るパスなので，$u(z)$ は $z(1)$ まで接続される．γ が K_μ に何回でも触れる一般の場合も同じ方針で証明される．

注．$k\in\mathbf{N}$, $W:=\{|z_i|<1, i=1,\cdots,n\}$, $\ell_1:=\{z_n=0\}$，$\ell_2:=\{z_n=z_1^k\}$ とする．もし $k\geq 2$ なら，関数 $\log(z_1-z_n^{1/k})$ は $\mathcal{R}(W-\ell_1\cup\ell_2)$ で正則であり，$\hat{z}\in\ell_2-T$ まで，あるパスに沿っては解析接続されるが，他のパスに沿っては接続されない．これが定義１で $u(z)$ が$\hat{z}\in K_2$ まで任意のパスに沿って解析接続されるとした理由である．

4．定理の証明

定理１，２を証明しよう．$P^{(1)}$ のかわりに P^{I}，$P^{(2)}$ のかわりに P^{II} としても成り立つ（定理2-4）ので，以下それらの場合を考える．$K_1\cup K_2$ 上に $u(z)$ の解析接続点があったとして，矛盾を導く．

K_2-T 上に解析接続点 $\hat{z}$ があったとする．命題3-3より，定理１では，$u(z)$ は $\mathcal{R}(\omega-K_1)$ で正則となり，定理２では，$u(z)$ は $\mathcal{R}(\omega-S\cup K_1)$ で正則となる．続いて，$u(z)$ はあるパスにそって原点まで解析接続されることを示す．そのために前の論文で得たコーシー・コワレフスカヤ型定理を用いる．

定義4-1.　m,r は $0 \leq r \leq m$ を満たす整数、σ は $0 \leq \sigma \leq 1$ を満たす実数とする。次の形の作用素のクラスを $\mathcal{L}^{m,r,\sigma}$ で表わす：

$$L := \sum_{s=0}^{r} a_s(z)(z_1 D_1)^{r-s} D_n^{m-r} + \sum_{s=0}^{m} \sum_{\alpha \in A(m-s)} b_\alpha(z) z_1^{\ell(\alpha)} D^\alpha$$

ここで $A(m-s) = \{\alpha; |\alpha| = m-s, \alpha_n \leq m-r, \alpha \neq (r-s, 0, \cdots, 0, m-r)\}$, 係数は原点近傍で正則、$\ell(\alpha)$ は非負整数で

$$\sigma\ell(\alpha) + (1-\sigma)\alpha_1 \geq r-s$$

を満たす。

さらに

$$I_L(\lambda) = \sum_{s=0}^{r} a_s(0)\lambda^{r-s} \tag{4}$$

を L の指数多項式、その根を特性指数とよぶ。

平面 $z_n = h$（h 定数）は重複度が少なくとも r の L の特性面であることに注意しよう. $U = \{z; |z_j| < \rho\} \subset \Omega$ とし、特性コーシー問題

$$Lv = 0, \quad v - w = O\{(z_n - h)^{m-r}\} \quad \text{as } z_n \to h \tag{5}$$

を考える。

定理4-2　$a_0(0) \neq 0$ かつ $I_L(\lambda) \neq 0, \forall\lambda \in\ bfN$ とする. すると2つの正定数 $\kappa, \rho'(<\rho)$ が存在し、$|h| < \kappa$ なる任意の $h \in \mathbf{C}$ と任意の $w \in \mathcal{H}(U)$ に対し、$U' = \{z; |z_j| < \rho' \text{ for } j < n, |z_n - h| < \rho'\}$ で正則な特性コーシー問題（5）の解

$u(z)$ が唯一つ存在する。

さて，$P=P^I, P^{II}$ にたいしてこの定理を適用するために，変数変換を行う．作用素 P を

$$P = a\{(D_1 + \sum_j{}' a_j D_j)^2 - \sum_{j,k}{}' a_{jk} D_j D_k\} + b_1 D_1 + \sum_j{}' b_j D_j + c$$

と表わす。ここで，$\sum_j', \sum_{j,k}'$ はそれぞれ $j \geq 2$, $j,k \geq 2$ についての和を表す．$(0,\nu')$ の近傍で、1つの分枝を選び、$\alpha(z,\zeta') = \sqrt{\sum_{j,k}' a_{jk}\zeta_j\zeta_k}$ と記す。仮定より、これは正則である。$\lambda^1 = -\sum' a_j\zeta_j + \alpha(z,\zeta'), \lambda^2 = -\sum' a_j\zeta_j - \alpha(z,\zeta')$ とする。

$\varphi_j(z)$ をつぎの初期値問題の解とする（$j=2,\cdots;n-1$）。

$$D_1\varphi + \sum_k{}' a_k D_k \varphi = 0, \quad \varphi(0,z') = z_j.$$

また、$\varphi_n = \varphi^1$ 、つまり、つぎの初期値問題の解とする。

$$D_1\varphi + \sum_k{}' a_k D_k \varphi - \alpha(z, D'\varphi) = 0, \quad \varphi(0,z') = z_n.$$

これらを用い次の変数変更を行う。

$$w_1 = z_1,\ w_j = \varphi_j(z), j = 2,\cdots,n. \tag{6}$$

この変換による $P(z,D)$ の変換を $\tilde{P}(w,\tilde{D})$ と記す：

$$\tilde{P}(w,\tilde{D}) = P(z(w), (\partial w/\partial z)(z(w))\tilde{D})$$

ここで、$\tilde{D} = (\tilde{D}_1,\cdots,\tilde{D}_n), \tilde{D}_j = \partial/\partial w_j$, $\partial w/\partial z$ は Jacobi 行列。

命題4-3　1）P が条件Nを満たすなら、$\tilde{P}$ も条件Nを満たす。

2）指数多項式は不変である。

3）$\tilde{P}$ は $\mathcal{L}^{2,1,1}$ または $\mathcal{L}^{2,1,1/2}$ に属する。

4）$F^1(\mu) = I_{\tilde{P}}(\mu)$.

5）変換 (6) において、$\varphi_n = \varphi^2$ としても、1）～3）は正しい。また、$F^2(\mu) = I_{\tilde{P}}(\mu)$ となる。

証明：1）明らかに、

$$\tilde{P}_2(w,\eta) = P_2 \circ \Psi := P_2(z(w), (\partial w/\partial z)(z(w))\eta).$$

$D_1 + \sum_j' a_j D_j = \tilde{D}_1 + \alpha(z, D'\varphi)\tilde{D}_n = \tilde{D}_1 + \tilde{\alpha}(w,\nu')\tilde{D}_n$ に注意し、

$$\mu^1 = -\tilde{\alpha}(w,\nu') + \tilde{\alpha}(w,\eta'), \quad \mu^2 = -\tilde{\alpha}(w,\nu') - \tilde{\alpha}(w,\eta')$$

とおくと、

$$\tilde{P}_2(w,\eta) = \tilde{a}\{\eta_1 - \mu^1(w,\eta')\}\{\eta_1 - \mu^2(w,\eta')\}.$$

ここで、$\tilde{a} = a(z(w)), \tilde{\alpha}(w,\eta) = \alpha \circ \Psi$.

明らかに、

$$\left.\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial \eta_1}\right|_{\eta_1 = \mu_1(w,\eta')} = \tilde{a}\{\mu^1(w,\eta') - \mu^2(w,\eta')\} = 2\tilde{a}\tilde{\alpha} = Q \circ \Psi.$$

従って、

$$\tilde{Q}(w,\eta') := \left.\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial \eta_1}\right|_{\eta_1 = \mu_1(w,\eta')} = 0 \quad \text{on } w_1 = 0.$$

さらに、$D_1 = \tilde{D}_1 + \sum_j'(D_1\varphi_j)\tilde{D}_j$ に注意すれば

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial w_1}(0,\nu') = \frac{\partial Q}{\partial z_1}(0,\nu').$$

以上により、$\tilde{P}$ が条件Nを満たすこと、および A^i が不変であることが分る。

2）明らかに B^i も不変だから、特性多項式は不変である。

3 & 4）$w_n = \varphi^1$ は相関数だから、$\tilde{D}_n^2$ の係数は 0 である。また、

$$\tilde{P}_2 = \tilde{a}\{\eta_1^2 + 2\tilde{\alpha}(w,\nu')\eta_1\eta_n + \tilde{\alpha}^2(w,\nu')\eta_n^2 - \tilde{\alpha}^2(w,\eta')\}$$

だから、$\tilde{D}_1\tilde{D}_n$ の係数は $2\tilde{a}\tilde{\alpha}(w,\nu') = \tilde{Q}^1(w,\nu')$. 仮定より $\tilde{Q}^1 = O(w_1), (\partial\tilde{Q}^1/\partial w_1)(0,\nu') = A^1$. また、$\tilde{D}_n$ の係数は $(\tilde{P}w_n)(0) = (P\varphi)(0) = B^1$. だから、$F^1(\mu) = I_{\tilde{P}}(\mu)$ が得られる。

仮定より $\tilde{a}\tilde{\alpha} = O(w_1)$ だから、$\tilde{a} = O(w_1)$ または$\tilde{\alpha} = O(w_1)$. 前者の場合、$\tilde{P}_2 = O(w_1)$ だから P はクラス $\mathcal{L}^{2,1,1}$ に属する。また後者の場合は $\tilde{P}_2 = O(|w_1|^2 + |\eta_1|^2)$ となりクラス $\mathcal{L}^{2,1,1/2}$ に属する。

5）容易に確かめられる。□

P^I, P^{II} を上記の様に変換された作用素とする. $\rho > 0$ を小さくとると，定理1では，$u(z)$ は $\mathcal{R}(\Omega - K_1)$ で正則であり，$K_1 = \{z_n = 0\}$ だから，分枝を1つえらぶとそれは $\Omega \cap \{\Re z_n > 0\}$ で正則となる.

定理1における κ, ρ' にたいし、$0 < |h| < \min\{\kappa, \rho'\}$，$\Re h > 0$ なる $h \in \mathbf{C}$ を1つ選び、$z^h = (0, \cdots, 0, h)$ とおく。$w = \sum_{i=0}^1 (D_n^i u)(z_1, \cdots, z_{n-1}, h)(z_n - h)^i/i!$ とおく。$w \in H(U)$ である。従って、定理4-2より、$U' = \{|z_i| < \rho' \text{ for } i < n-1, |z_n - h| < \rho'\}$ で正則なコーシー問題の解 $v(z)$ が唯1つ存在する。

これは z^h の近傍で u と等しいので、u の正則延長である。h の選び方より、U' は原点を含むので、u は原点まで解析接続されることがわかる。このことは初期データ $u_i(z_1, \cdots, z_{n-1}), i = 0, 1,$ も原点まで解析接続されることを意味する．命

題3-2を S 上で用いると，初期データが $\Omega\cap S$ で正則となり，定理の仮定に反する．

定理2では，$u(z)$ は $\mathcal{R}(\Omega-S\cup K_1)$ で正則であり，$K_1=\{z_n=0\}$．しかし初期データは $S-T$ で正則だから，適当な分枝をえらぶと $\Omega\cap\{\Re z_n>0\}$ で正則となる．従って，全く同様にして，その分枝が原点まで解析接続され，矛盾が生ずる．

以上で定理1，2が証明された．

5．高階作用素への拡張

P を条件Nを満たす2階の作用素とし，

$$L:=P^r+Q_1P^{r-1}+\cdots+Q_r$$

と定める。ここで Q_i は正則係数 i 階の作用素．また，P の K^i に対応する指数多項式 F^i を用い，L の指数多項式を

$$G^i(\lambda)=(F^i)^r(\lambda)+Q_1^\circ(0,\nu)(F^i)^{r-1}(\lambda)+\cdots+Q_r^\circ(0,\nu)$$

で定める．ここで Q_i° は Q_i の i 次斉次部分、$\nu=(0,\cdots,0,1)$.

すると，$P=P^I$ のときはコーシー問題

$$Lu=0,\quad D_1^iu(0,z')=u_i(z'),i=0,1,\cdots,2r-1$$

に対して定理1と同じことが成り立つ．$P=P^{II}$ のときはコーシー問題

$$Lu=0,\quad D_1^iu(0,z')=u_i(z'),i=0,1,\cdots,r-1$$

に対して定理2と同じことが成り立つ．ただし，指数条件は

$$G^i(\mu) \neq 0, \forall \mu \in \mathbf{N}, i = 1, 2.$$

に置き換えるものとする．

証明の方針は全く同じである．必要なことは，節4で用いた変数変更により，作用素Lはクラス$\mathcal{L}^{2r,r,1/2}$または$\mathcal{L}^{2r,r,1}$の作用素に変換され，変換された作用素$\tilde{L}$の指数多項式$I_{\tilde{L}}$が，変換に応じて，G^1またはG^2と一致することを確かめるだけである．

文献

(F) S. Fujiie, *Singular Cauchy problems of Higher order with characteristic initial surface*, Thesis

(G-F) H. Grauert and K. Fritszche, *Several Complex Variables*, Springer, Berlin 1976.

(H-L-W) Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, *Système d'équations aux dérivées partielles à caraactéristiques multiples; problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielles* , J. Math. pures et appl., **55** (1976), 297-352

(I1) K. Igari, *Fuchs type localizations and non-existence of singular solutions*, Funkcialaj Ekvacioj, **37**(1994), 537-547

(I2) K. Igari, *On the branching of singularities in complex domains*, Proc. Japan Acad., **70** Ser. A (1994), 128-130

(L) J. Leray, *Uniformisation de la solution du problème de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I)*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 389-429

(O) S. Ouchi, *Singularities of solutions of equations with non-involutive characteristics-I; the case of second order Fuchsian equations*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 215-251

(P) J. Persson, *Ramification of the solutions of the Cauchy problem for a special second order equation with singular data*, Comm. P. D. E., **17** (1992), 23-31

(S-V-W) D. Schiltz, J. Vaillant et C. Wagschal, *Problème de Cauchy ramifié: Racine caractéristiques double ou triple en invotution, J. Math. pures et appl.,* **4** *(1982), 423-443*

(U) J. Urabe, Hamada's theorem for a certain type of operators with double characteristics, J. Math. Kyoto Univ., **23** *(1983), 301-339*

(W1) C. Wagschal, Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable, J. Math. pures et appl., **62** *(1983), 99-127*

(W2) C. Wagschal, Problème de Cauchy ramifié pour une classe d'operateurs à caractéristiques tangentes (I), J. Math. pures et appl., **67** *(1988), 1-21*

(Z) M. Zerner, Domaines d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles , C. R. Acad. Sci. Paris, **272** *(1971), 1646-1648*